# Lemat Morse'a (praca domowa)

**Errata (09.12.2019).** Poprawiony wzór (2) oraz treść zadania 3 ($\varphi_{ij} \in \mathfrak{m}$).

**Errata (15.12.2019).** Poprawiony zapis formy dwuliniowej/kwadratowej.

**Errata (18.12.2019).** W lemacie Morse'a dodane brakujące założenie $u(0) = 0$.

**Zasady rozwiązywania.** Poniższe siedem zadań należy samodzielnie rozwiązać, a następnie oddać na piśmie. Dopuszczalna jest forma papierowa (czytelnym pismem) i elektroniczna (dokument zredagowany w TeXu lub skan czytelny po wydrukowaniu). Można i należy korzystać z twierdzeń dowiedzionych na wykładzie i ćwiczeniach, ale w przypadku twierdzeń bez nazwy/nazwiska należy wskazać na założenia i tezę wykorzystywanego twierdzenia.

**Dodatkowe źródła.** Ponieważ konieczna jest znajomość postaci całkowej reszty we wzorze Taylora, wolno powoływać się na zadania z serii o tej nazwie (mimo że tej serii nie omawialiśmy na zajęciach).
Gdyby komuś miało to pomóc, można zajrzeć do pracy J.-C. Tougerona *Idéaux de fonctions différentiables*.

**Termin.** Rozwiązania należy oddać **do środy 18 grudnia** (do północy, jeśli chodzi o wersję elektroniczną).

---

**Oznaczenie.** Przez $\mathfrak{m}$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji gładkich zerujących się w zerze.

**Twierdzenie (Tougeron).** Niech $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką. Załóżmy, że funkcję $F(x, 0)$ można przedstawić jako kombinację liniową

$$F(x,0) = \sum_{ij} \frac{\partial F}{\partial y_i}(x,0) \frac{\partial F}{\partial y_j}(x,0) \varphi_{ij}(x) \tag{1}$$

dla pewnych funkcji gładkich $\varphi_{ij} \in \mathfrak{m}$. Wówczas równanie $F(x, y(x)) = 0$ ma w otoczeniu $x = 0$ gładkie rozwiązanie $y(x)$ w postaci

$$y_i(x) = \sum_j \frac{\partial F}{\partial y_j}(x,0) z_{ij}(x) \tag{2}$$

dla pewnych $z_{ij} \in \mathfrak{m}$.

**Zadanie 1.** Wykorzystać postać całkową reszty we wzorze Taylora

$$F(y) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha F(0) y^\alpha + R(y),$$

by uzyskać postać

$$R(y) = \sum_{|\alpha|=k+1} R_\alpha(y) y^\alpha$$

dla pewnych funkcji gładkich $R_\alpha$.

**Zadanie 2.** W przypadku, gdy funkcja $F(x,y)$ z poprzedniego zadania zależy też od zmiennej $x$ (traktowanej we wzorze Taylora jako parametr), to (po ograniczeniu się do $k=1$)

$$F(x,y) = F(x,0) + \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(x,0) y_i + \sum_{ij} R_{ij}(x,y) y_i y_j, \tag{3}$$

dla pewnych funkcji gładkich $R_{ij}(x,y)$.
*Wskazówka.* Aby uzasadnić gładkość $R_{ij}$ (względem obu zmiennych), jeszcze raz powołać się na postać owych funkcji.

**Zadanie 3.** Mając dane funkcje gładkie $\varphi_{ij}(x) \in \mathfrak{m}$ i $\Phi_{ij}(x,z)$, określmy funkcję

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m^2} \ni (x,z) \mapsto G(x,z) \in \mathbb{R}^{m^2}$$

wzorem

$$G_{ij}(x,z) = \varphi_{ij}(x) + z_{ij} + \sum_{rs} z_{ri} z_{sj} \Phi_{rs}(x,z).$$

Wykazać, że wokół $x=0$ istnieje gładka funkcja $z(x) \in \mathfrak{m}$ spełniająca $G(x,z(x)) = 0$.

**Zadanie 4.** Wykazać twierdzenie Tougerona.
*Wskazówka.* Do równości $F(x,y(x)) = 0$ podstawić postać $F(x,0)$ z założenia (1), postać $F(x,y)$ ze wzoru Taylora (3) oraz szukaną postać $y$ (2), a następnie pogrupować względem iloczynów $\frac{\partial F}{\partial y_i}(x,0)\frac{\partial F}{\partial y_j}(x,0)$. Odpowiednio dobierając funkcje $\Phi(x,z)$, sprowadzić twierdzenie do poprzedniego zadania.

**Definicja.** Symetryczną formą dwuliniową nazwiemy funkcję $Q\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ postaci $Q(x,y) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$ wyznaczoną przez macierz symetryczną $(a_{ij})$. Ponadto nazwiemy ją niezdegenerowaną, jeśli przekształcenie

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Q(x,\cdot) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

jest izomorfizmem liniowym. Równoważnie, jeśli macierz $(a_{ij})$ jest niezdegenerowana.

Przekształcenie $x \mapsto Q(x,x)$ nazywamy formą kwadratową.

**Lemat Morse'a.** Załóżmy, że $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, dla której $u(0) = 0$ i $du(0) = 0$, ale druga pochodna $Q := d^2u(0)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest niezdegenerowaną formą dwuliniową. Wówczas istnieje dyfeomorfizm $z$ pewnego otoczenia zera taki, że

$$u(z(x)) = Q(x,x).$$

**Wniosek.** Składając dodatkowo z odpowiednio dobranym izomorfizmem liniowym, możemy funkcję $u$ sprowadzić do postaci

$$u(z(x)) = -x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2,$$

gdzie $k$ jest indeksem formy $Q$.

**Zadanie 5.** Niech $Q(x,x)$ będzie niezdegenerowaną formą kwadratową, a $R(x)$ funkcją postaci

$$R(x) = \sum_{ij} R_{ij}(x) x_i x_i$$

dla pewnych $R_{ij} \in \mathfrak{m}$. Wykazać, że w otoczeniu zera istnieje funkcja gładka $y(x)$ spełniająca

$$Q(x+y(x), x+y(x)) = Q(x,x) + R(x), \quad y(0) = 0, \quad dy(0) = 0.$$

*Wskazówka.* Wykorzystać twierdzenie Tougerona dla $F(x,y) = Q(x+y, x+y) - Q(x,x) - R(x)$.

**Zadanie 6.** Uzasadnić, że jeśli $y$ jest funkcją gładką z poprzedniego zadania, to $x \mapsto x + y(x)$ jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia zera.

**Zadanie 7.** Wykazać lemat Morse'a.
*Wskazówka.* Za $R$ przyjąć resztę we wzorze Taylora i wykorzystać powyższy dyfeomorfizm do konstrukcji $z(x)$.